التحليل الطيفي المحسن لتقريبات المؤثرات التفاضلية المتماثلة

دينا عبدالله الرحيلي

إشراف

د.دلال عدنان مطيوري

أ.د. إيمان سالم العيدروس

الملخص

من الجيد دائما تطوير خوارزميات فعالة لحساب القيم الذاتية أو القيم الذاتية المعممة, حيث حساب القيم الذاتية لمصفوفات ذات حجم كبير مكلف حسابياً. ولكن عندما نتحدث عن المصفوفات المنظمة، التي تحتوي على قيم ذاتية غير عشوائية وإنما تتبع نمط منتظم، فمن الممكن تصميم خوارزميات فعالة حسابياً لإيجاد القيم الذاتية أو القيم الذاتية المعممة. في هذه الرسالة قمنا بتطوير خوارزمية لاستقراء القيمة الذاتية المعممة لزوج من المصفوفات من نوع Hermitian Toeplitz or Quasi-Toeplitz. تم تجميع المعلومات من القيم الذاتية لمصفوفات ذات حجم صغير لحساب القيم الذاتية لمصفوفات ذات حجم أكبر. الجزء الرئيسي في الخوارزمية المقترحة لدينا هو التوسع في القيم الذاتية باستخدام معاملات مجهولة. نقوم بحساب هذه المعاملات عبر الشبكة من مجموعات مختلفة من القيم الذاتية لمصفوفات مختلفة الحجم. بعد حساب المعاملات، يمكننا استقراء القيم الذاتية لمصفوفات ذات أحجام كبيرة. الدوال المولدة من مصفوفات Toeplitz تلعب دورا هاما في الخوارزمية. اختبرنا مدى صحة وكفاءة الخوارزمية المقترحة بتقديم بعض الأمثلة المصممة ذاتيا من نوع Hermitian Toeplitz. وأخيرا، قمنا بتطبيق Isogeometric analysis على مسألة القيمة الحدية من الرتبة الثانية مع شروط حدية من نوع Dirichlet وحساب القيم الذاتية المعممة المرتبطة بها. في آخر مثال نلاحظ أن المصفوفات الناتجة بعد تطبيق (IgA) ليست من نوع Toeplitz بسبب تتطبيق الشروط الحدية، ولكن مع ذلك ظهر لدينا أن الخوارزمية أيضا فعالة في هذه الحالة.

Fine Spectral Analysis for Isogeometric Approximations of Differential Operators

Dina Abdullah Alrehaili

Supervised By
Dr. Dalal Adnan Amer Maturi
Prof.Dr. Eman salem Al-Aidarous

Abstract

It is always fascinating to develop efficient algorithms to compute the eigenvalues or generalized eigenvalues. Computing the eigenvalues of large matrices are computationally expensive. However, when talking about structured matrices, whose eigenvalues are not random but follow some regular pattern, it is possible to design computationally efficient algorithms to find eigenvalues or generalized eigenvalues. We have developed an algorithm to extrapolate the generalized eigenvalues of a given pair of Hermitian matrices that have Toeplitz or Quasi-Toeplitz structure. We collect information of eigenvalues of much smaller matrices to compute the eigenvalues of much larger matrices. The central part of our proposed algorithm is the expansion of eigenvalue with unknown coefficients. We compute the coefficients, over a grid, from different sets of eigenvalues of different size matrices. After the computation of the coefficients, we can extrapolate the eigenvalues for much larger matrices. The generating functions of Toeplitz matrices play an important role in the algorithm.
We have tested our algorithm for some self-designed examples of Hermitian Toeplitz matrices to show the correctness and efficiency of our proposed algorithm. Finally, we apply isogeometric analysis (IgA) to discretize a second order boundary value problem with Dirichlet boundary conditions and compute the associated generalized eigenvalues. The IgA discretized matrices are not Toeplitz due to the implementation of boundary conditions while our algorithm works well in this case.